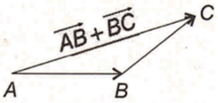
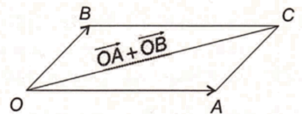
VECTORI ÎN PLAN. ECUAȚIA DREPTEI

- ***Operații cu vectori***

a) *Regula triunghiului* sau *relația lui Chasles*: Oricare ar fi trei puncte A, B, C în plan, are loc egalitatea:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



b) *Regula paralelogramului*: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.



  - Adunarea mai multor vectori se realizează cu regula poligonului.
  - $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

- ***Vectori coliniari***

Fie $\vec{v}$ un vector în plan și $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Vectorul $\alpha\vec{v}$ reprezintă produsul dintre un vector și un scalar și este vectorul care are aceeași direcție cu vectorul $\vec{v}$, modulul egal cu $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$, acelaşi sens cu $\vec{v}$ dacă $\alpha > 0$ și are sens opus cu $\vec{v}$ dacă $\alpha < 0$.

  - $\vec{v}$ și $\alpha\vec{v}$ sunt vectori coliniari.
  - $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.
  - $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.
  - $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt necoliniari dacă și numai din egalitatea $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ rezultă că $\alpha = \beta = 0$.
  - $\alpha\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $\vec{v} = \vec{0}$.
  - A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt vectori coliniari $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$.
  - Dacă $M \in [AB]$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = k$ atunci $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}$, pentru orice punct O din plan.

    Pentru $k = 1$, adică dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ avem că $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

- ***Reper cartezian în plan***

Un reper cartezian ortogonal în plan este definit de o pereche ordonată de axe perpendiculare, având aceeași origine *O*. Punctul *O* se numește originea reperului. Prima axă, notată Ox se numește axa absciselor, iar a doua axă, notată Oy, se numește axa ordonatelor.

Notație: xOy sau $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unde $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sunt versorii axelor Ox, respectiv Oy.

  - Dacă $A(x_A, y_A)$ atunci $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Deci x_A, y_A sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}$, adică $\overrightarrow{OA}(x_A, y_A)$.
  - Dacă $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ atunci $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$, adică $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
  - $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ reprezintă lungimea segmentului $[AB]$, distanța de la *A* la *B* sau modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$.
  - Dacă *M* este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.
  - Dacă $M \in [AB]$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = k$ atunci $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + kx_B}{1+k} \\ y_M = \dfrac{y_A + ky_B}{1+k} \end{cases}$.
  - Dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$.

- $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$.
- Fie vectorii $\overrightarrow{v_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ și $\overrightarrow{v_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ atunci:
  - $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j}$.
  - $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = (a_1 - a_2)\vec{i} + (b_1 - b_2)\vec{j}$.
  - $\alpha\overrightarrow{v_1} = \alpha \cdot a_1\vec{i} + \alpha \cdot b_1\vec{j}$.
  - $\left|\overrightarrow{v_1}\right| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$.
  - $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.
  - Produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ este $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \left|\overrightarrow{v_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_2}\right| \cdot \cos\alpha$, unde $\alpha = \sphericalangle\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$. De asemenea $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2$, iar $\cos\alpha = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.
  - $\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{v_2}$ sunt perpendiculari dacă și numai dacă $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$.

➢ ***Vectorul de poziție al unui punct în plan***

Fie O un punct în planul P. Dacă $A \in \mathcal{P}$ atunci $\overrightarrow{OA}$ este vectorul de poziție al punctului A și se notează $\overrightarrow{r_A}$.

- Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci $\overrightarrow{r_M} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}\right)$.
- Dacă $M \in [AB]$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = k$ atunci $\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B}}{1+k}$.
- G este centrul de greutate al sistemului de puncte $A_1, A_2, ..., A_n$ dacă $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.
- Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$.
- Dacă G este centrul de greutate al sistemului de puncte $A_1, A_2, ..., A_n$ atunci pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$ are loc relația $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{MG}$ numită relația lui Leibniz.
- Dacă $[AD$ este bisectoarea interioară a $\sphericalangle BAC$ în triunghiul ABC, unde $D \in [BC]$ atunci $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$.
- Dacă I este centrul cercului înscris triunghiului ABC atunci $\overrightarrow{r_I} = \frac{a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}$.
- Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC atunci $\overrightarrow{r_H} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}$.

Teorema lui Menelau: Fie triunghiul ABC și d o transversală care intersectează dreptele AB, AC, BC în punctele M, N și P. Atunci are loc relația $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$.

Teorema lui Ceva: Fie triunghiul ABC și punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$ și $P \in [AC]$. Dreptele AN, BP și CM sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

➢ ***Ecuația dreptei în plan***

În reperul cartezian xOy se consideră punctele distincte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$.

- Panta dreptei AB sau coeficientul unghiular este $m_{AB} = tg\alpha$, unde $\alpha = m\left(AB, Ox\right)$ sau $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- Ecuația dreptei AB este $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0$.
- Ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta m este $y-y_A=m\left(x-x_A\right)$.
- Ecuația carteziană explicită este $y=mx+n$, unde m este panta dreptei, iar n este ordonata la origine.
- Ecuația generală a dreptei este $ax+by+c=0$, iar $m=-\frac{a}{b}$, dacă $b\neq 0$.
- Ecuația dreptei prin tăieturi este $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$, unde $A\left(a,0\right)$ și $B\left(0,b\right)$ sunt intersecțiile dreptei cu axele de coordonate.
- Punctele $A\left(x_A,y_A\right)$, $B\left(x_B,y_B\right)$ și $C\left(x_C,y_C\right)$ sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$ sau $m_{AB}=m_{AC}$.
- Aria triunghiului ABC este $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\Delta\right|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Dacă $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ și $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$, atunci:

- $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.
- $d_1=d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.
- Punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 se determină rezolvând sistemul $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.
- Distanța de la punctul $M\left(x_0,y_0\right)$ la dreapta d_1 este $d\left(M,d_1\right)=\frac{\left|a_1x_0+b_1y_0+c_1\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$.
- $\cos\alpha=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, unde $\alpha=m\left(\widehat{d_1,d_2}\right)$.

Dacă $d_1: y=m_1x+n_1$ și $d_2: y=m_2x+n_2$, atunci:

- $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$.
- $d_1=d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=m_2 \\ n_1=n_2 \end{cases}$.
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1m_2=-1$.
- $\cos\alpha=\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}}$, unde $\alpha=m\left(\widehat{d_1,d_2}\right)$.

APLICAȚII

1. Fie triunghiul ABC și M este mijlocul segmentului $\left[AB\right]$. Arătați că $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$.
2. În triunghiul ABC punctul N este mijlocul segmentului $\left[AC\right]$. Arătați că $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BC}$.
3. În triunghiul ABC punctele R, S, T sunt mijloacele laturilor $\left[AB\right]$, $\left[BC\right]$, respectiv $\left[AC\right]$. Arătați că $\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AS}$.
4. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de centru O. Arătați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

5. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de centru O. Calculați $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.
6. Demonstrați că în patrulaterul $ABCD$ are loc relația $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.
7. În patrulaterul $ABCD$ are loc relația $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram.
8. Fie paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{AD}$.
9. Demonstrați că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc relația $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.
10. Fie triunghiul ABC și M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, iar O un punct în plan. Arătați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.
11. Fie pătratul $ABCD$ și O centrul său. Calculați $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.
12. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$, știind că $ABCD$ este un pătrat de latură 1.
13. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Arătați că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\cdot\overrightarrow{BC}$.
14. Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM. Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
15. Fie triunghiul ABC și $M\in[BC]$ astfel încât $BC=3\cdot BM$. Arătați că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.
16. Punctele M, N și P verifică relația $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculați lungimea segmentului MP, știind că $MN=3$.
17. Se consideră triunghiul ABC și punctele D și E astfel încât $\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE}=2\cdot\overrightarrow{EC}$. Arătați că $BC \parallel DE$.
18. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și P astfel încât $\overrightarrow{PB}=2\cdot\overrightarrow{CP}$. Arătați că $AC \parallel GP$.
19. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și $GM \parallel BC, M\in(AC)$. Determinați $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GM}=k\cdot\overrightarrow{BC}$.
20. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\cdot\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.
21. Fie triunghiul ABC. Determinați $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $3\cdot\overrightarrow{BC}+3\cdot\overrightarrow{CA}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.
22. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $M(8,6)$. Calculați distanța dintre punctele O și M.
23. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(0,4)$. Calculați lungimea segmentului AB.
24. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5,-1)$ și $B(2,-1)$. Calculați distanța dintre punctele A și B.
25. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(4,0)$ și $B(0,4)$. Arătați că triunghiul AOB este isoscel.
26. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,2)$ și $B(-3,-2)$. Arătați că $AO=OB$.
27. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), A(0,6)$ și $B(8,0)$. Calculați perimetrul triunghiului AOB.
28. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3), B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.
29. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ și $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.
30. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(2-a,3+a)$. Determinați numerele reale a știind că lungimea segmentului AB este egală cu 4.
31. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a), B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $AB+BC=AC$.
32. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

33. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1), B(1,1)$ și $C(0,-2)$. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
34. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(m,0), B(2,-1)$ și $C(5,4)$, unde m este număr real. Determinați valorile numărului real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.
35. Determinați numărul real x pentru care $x, x+7$ și $x+8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.
36. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2), B(-1,0)$ și $C(1,6)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
37. Calculați aria triunghiului echilateral ABC știind că $A(-2,3)$ și $B(2,6)$.
38. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-2)$ și $B(-5,4)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
39. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.
40. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ și $C(-1,3)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC.
41. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1), B(3,5)$. Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.
42. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2), N(4,3)$ și $P(6,1)$. Determinați lungimea segmentului MQ, unde Q este mijlocul segmentului NP.
43. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5), B(3,5)$ și $C(2,1)$. Determinați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
44. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2), B(-2,3)$ și $C(6,5)$. Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.
45. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$ și $D(8,5)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
46. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3), B(6,3)$ și $C(4,0)$. Demonstrați coordonatele punctului D știind că $ABCD$ este paralelogram.
47. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1), B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.
48. Se consideră punctele $A(2,2)$, $B(-2,-4)$, $C(6,0)$ și $M \in [BC]$ astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{3}{4}$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AM}$.
49. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,5), B(1,-3)$. Determinați numerele reale a și b știind că $\overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$.
50. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4), B(0,6)$ și $C(m,5)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
51. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ și $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.
52. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
53. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{u} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $3\vec{u} - 4\vec{v}$.
54. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(3,-4)$ și $\overrightarrow{OB}(4,-5)$. Determinați numerele reale α și β pentru care vectorul $-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α, β).

55. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}-2\vec{j}$. Determinați numerele reale p și r astfel încât $\vec{v}=p\vec{a}+r\vec{b}$.
56. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$ și $B(-2,-3)$. Determinați coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.
57. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,-4)$ și $B(-1,6)$. Determinați coordonatele punctului $C\in(AB)$ astfel încât $\frac{CA}{CB}=2$.
58. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(-1,-3)$ și $\overrightarrow{OB}(7,-5)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.
59. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,3)$, $A(1,-2)$ și $B(5,1)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.
60. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}-3\vec{j}$. Determinați modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.
61. Determinați numărul real m, știind că vectorii $\vec{u}=(m-4)\vec{i}+(2m-3)\vec{j}$ și $\vec{v}=(m+3)\vec{i}+(2m+1)\vec{j}$ au același modul.
62. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
63. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari.
64. Determinați numărul real m, știind că vectorii $\vec{u}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=(m+1)\vec{i}-4\vec{j}$ sunt coliniari.
65. Calculați $\left(3\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(-2\vec{i}+4\vec{j}\right)-\left(4\vec{i}-3\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$.
66. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$, $B(5,1)$ și $C(-1,3)$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
67. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
68. Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=m\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real m pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.
69. Determinați numărul real pozitiv m, știind că vectorii $\vec{u}=(m-1)\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$ sunt perpendiculari.
70. Determinați numărul real m, știind că vectorii $\vec{u}=(m-1)\vec{i}+(2m+2)\vec{j}$ și $\vec{v}=(m+1)\vec{i}+\vec{j}$ sunt perpendiculari.
71. Demonstrați că vectorii $\vec{u}=a\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-(a+1)\vec{j}$ nu sunt perpendiculari, pentru orice număr real a.
72. Calculați $\vec{u}^2-\vec{v}^2$, știind că $\vec{u}+\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{u}-\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$.
73. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$, $B(2,-1)$, $C(-1,-3)$ și $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați numărul real a, știind că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
74. Aflați măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC știind că $A(-2,2)$, $B(-2,-3)$, $C(2,-3)$.
75. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-4)$, $B(-4,3)$ și $C(-1,-2)$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$.
76. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(1,-2)$. Determinați cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.
77. Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Calculați $\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right)$, știind că $\vec{u}\vec{v}=8$, $\left|\vec{u}\right|=3$ și $\left|\vec{v}\right|=4$.
78. Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Calculați $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)\cdot\left(3\vec{v}+2\vec{u}\right)$, știind că $\left|\vec{u}\right|=2$, $\left|\vec{v}\right|=5$ și $m\left(\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$.
79. Arătați că vectorii $\vec{u}=4\vec{i}+5\vec{j}$ și $\vec{v}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ formează un unghi obtuz.
80. Fie $\vec{r_A}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{r_B}=3\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{r_C}=2\vec{i}+3\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Determinați vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC.

81. Determinați vectorul de poziție al punctului C al triunghiului ABC, știind că $\overrightarrow{r_A}=7\vec{i}+6\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=-5\vec{i}-3\vec{j}$ și $\overrightarrow{r_G}=\vec{i}+2\vec{j}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.
82. Determinați numerele reale m pentru care punctul $A_m\left(2m-1,m^2\right)$ se află pe dreapta $d:x-y+1=0$.
83. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(1,0)$. Determinați ecuația dreptei AB.
84. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-3)$ și $B(4,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.
85. Determinați numărul real m, știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y=mx-2$.
86. Determinați ecuația medianei din B a triunghiului ABC, știind că $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$.
87. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB, știind că $A(2,0)$ și $B(4,-2)$.
88. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN, știind că $M(2,-3)$ și $N(-4,1)$.
89. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-1)$, $B(3,1)$ și $C(2,3)$. Determinați ecuația dreptei OG, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.
90. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,-2)$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=-x+4$.
91. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-2,3)$ și este perpendiculară pe dreapta $d:x-y-1=0$.
92. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(-1,-2)$ și $C(3,2)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC.
93. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=-\frac{3x}{2}-6$ și $d_2: y=(2m+5)x-2$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
94. Determinați ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, știind că $A(1,3)$, $B(-1,2)$ și $C(4,-5)$.
95. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-3)$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(-1,2)$ și $D(2,4)$.
96. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$, $B(2,-2)$ și $C(0,-3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu dreapta AC.
97. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$, $B(0,1)$ și $C(4,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.
98. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin mijlocul segmentului OA și este paralelă cu dreapta AB.
99. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=-3x+2020$ și punctul $A(0,-1)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
100. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=(a-3)x-3$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{5}+2$. Determinați numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
101. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $(m+2)x+my-3=0$ și d_2, de ecuație $4mx+(m+2)y+12=0$. Determinați numărul real m, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
102. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $3x+my+2=0$ și d_2, de ecuație $nx+2y-8=0$. Determinați numerele reale m și n, știind că dreptele d_1 și d_2 coincid.
103. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1:3x+y-2=0$, $d_2:2x+3y+1=0$ și $d_3:x+y+a=0$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că cele trei drepte d_1, d_2 și d_3 sunt concurente.
104. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x+a^2y+a^2=0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
105. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(1,-1)$, $C(3,1)$ și $D(4,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele AB și CD sunt paralele.

106. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$, $B(3,1)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul C aparține dreptei AB.
107. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(4,2)$ și $C(0,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.
108. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$, $B(3,3)$ și $C(1-a,2a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.
109. Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$.
110. Calculați distanța de la punctul $A(-1,3)$ la dreapta $d: -3x+4y-5=0$.
111. Calculați distanța de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d: 5x-12y+9=0$.
112. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1), B(3,-1)$ și $C(4,0)$. Calculați lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului ABC.
113. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$ și $B(1,-3)$. Calculați distanța de la originea axelor la dreapta AB.
114. Calculați distanța dintre dreptele d_1, de ecuație $3x-2y+4=0$ și d_2, de ecuație $6x-4y+7=0$.
115. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$, $B(3,1)$ și $C(5,1)$. Calculați aria triunghiului ABC.
116. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(1,-1)$ și $C(5,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.
117. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,-3)$ și are panta egală cu 2.
118. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(4,0)$ și intersectează axa Oy în punctul de ordonată 3.
119. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(1,1)$. Determinați numerele reale m și n pentru care punctele A și B se află pe dreapta de ecuație $mx+ny+2=0$.
120. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile $A(2,0)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$ și $D(0,2)$ este dreptunghi.