PROGRESII ARITMETICE. PROGRESII GEOMETRICE

a) Progresii aritmetice

Definiții echivalente:

1. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă orice termen, începând cu al doilea, este egal cu precedentul la care se adaugă o constantă reală numită rația progresiei.
2. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă există $r \in \mathbf{R}$ astfel încât $a_{k+1} = a_k + r, \forall k \geq 1$.
3. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă $a_{k+1} - a_k = r, \forall k \geq 1$.

Observație: Dacă $r = 0$ atunci progresia este un șir constant $a_n = a_1, \forall n \geq 1$.

Teorema1. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă termenul general este dat de relația $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, \forall n \geq 1$, unde r este rația progresiei.

Teorema2. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă termenul general este dat de relația $a_n = a_k + (n-k)\cdot r, \forall n \geq 1$.

Teorema3. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă are loc relația

$$\frac{a_n - a_m}{n-m} = \text{constant} = r, \forall n, m \geq 1, n \neq m.$$

Teorema4. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \forall k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$.

Teorema5. Într-o progresie aritmetică finită, suma termenilor egal depărtați de extreme este egală cu suma termenilor extremi, adică $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \forall k \leq n$.

Observația1: Suma primilor *n* termeni ai unei progresii aritmetice notată $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ este dată de formula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$, care este echivalentă cu $S_n = \dfrac{\left[2a_1 + (n-1)\cdot r\right]\cdot n}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Observația2: Numerele reale a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă și numai dacă $b = \dfrac{a+c}{2}$.

b) Progresii geometrice

Definiții echivalente:

1. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă orice termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul înmulțit cu o constantă reală nenulă numită rația progresiei.
2. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă există $q \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $b_{k+1} = b_k \cdot q, \forall k \in \mathbf{N}^*$.
3. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \text{constant} = q, \forall k \in \mathbf{N}^*$.

Observație: Relația de recurență între termenii consecutivi ai unei progresii geometrice este o relație de recurență liniară de forma $b_{n+1} = \alpha \cdot b_k + \beta,$ cu $\beta = 0$ și $\alpha = q \neq 0$.

1. Dacă $q = 0$ atunci progresia devine $b_1, 0, 0, ...$.
2. Dacă $q = 1$ atunci progresia este șirul constant $b_n = b_1, \forall n \geq 1$.
3. Dacă $b_1 > 0$ și $q > 1$ atunci se obține o progresie strict crescătoare, iar dacă $0 < q < 1$ atunci se obține o progresie strict descrescătoare.

Teorema1. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă termenul general este dat de relația $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 1$, unde $q \in \mathbf{R}^*$ este rația progresiei.

Teorema2. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă termenul general este dat de relația $b_n = b_k \cdot q^{n-k}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Teorema3. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ de termeni pozitivi este o progresie geometrică dacă și numai dacă $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}, \forall k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$.

Teorema4. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, \forall k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$.

Teorema5. Într-o progresie geometrică finită, produsul termenilor egal depărtați de extreme este egal cu produsul termenilor extremi, adică $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n, \forall k, 1 \leq k \leq n$.

Observația1: Suma primilor *n* termeni ai unei progresii geometrice notată $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ este dată de formula $S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1 \\ n \cdot b_1, \quad q = 1 \end{cases}$.

Observația2: Numerele reale a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice dacă și numai dacă $b^2 = a \cdot c.$

APLICAȚII

1. Determinați al zecelea termen al șirului $1, 8, 15, 22, ...$.
2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 7$ și $a_6 = 12$. Calculați a_9.
3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 2$ și $a_7 = 14$. Calculați a_{2020}.
4. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = -3$ și $a_2 = 5$. Calculați a_{27}.
5. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2 = 3$ și $r = -4$. Calculați a_7.
6. Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_{13} - a_3 = 30$.
7. Calculați al cincilea termen al unei progresii aritmetice știind că primul termen este 5 și al treilea termen este 15.
8. Determinați termenul al patrulea al unei progresii aritmetice știind că primul termen este 13 și rația este -2.
9. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 11, 16, ...$.
10. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 3 cu $a_4 + a_5 = 15$. Determinați a_1.
11. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_4 + a_{18} = 24$. Calculați $a_9 + a_{13}$.
12. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 4$.
13. Se consideră progresia aritmetică de rație 3. Aflați primul termen al progresiei dacă suma primilor 10 termeni ai progresiei este 250.
14. Determinați valorile reale pozitive ale numărului x știind că $\log_2 x$, 6 și $\log_2 x^2$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
15. Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numerele $5^x - 2$, $3 \cdot 5^x$ și $5^{x+1} + 2$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
16. Determinați numărul real x, știind că $3^x - 3$, 9^x și $3^{x+1} + 1$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
17. Determinați numerele reale x, știind că $x + 5$, $x^2 + x - 1$ și $x + 1$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
18. Determinați numărul real x, știind că $x - 2$, $3x + 4$ și $x + 6$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
19. Determinați numărul real x, știind că $2x - 1$, $3x - 1$ și $5x - 11$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
20. Determinați numerele reale x, știind că $x^2 + 4x + 1$, $x + 7$ și $4x^2 - 3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
21. Determinați numărul real x, știind că șirul $3, 5x - 1, 9x, 66, ...$ este o progresie aritmetică.
22. Calculați suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 3$ și $a_2 = 5$.
23. Calculați sumele:

a) $1+4+7+10+...+31$; b) $1+11+21+31+...+151$; c) $4+1-2-5-8-...-32$.

24. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ și $a_2=5$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.
25. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=4$ și $a_6=24$. Calculați suma primilor 24 de termeni ai progresiei.
26. Determinați numărul natural n din egalitatea $1+6+11+...+n=1071$.
27. Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_6-a_3=15$ și $a_2+a_3+a_6+a_7=38$.
28. Determinați al nouălea termen al unei progresii geometrice, știind că rația este $\frac{1}{2}$ și primul termen este 128.
29. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=3$ și $b_2=6$. Calculați b_7.
30. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1=1$ și $b_2=4$. Calculați b_6.
31. Determinați primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $\frac{b_1}{b_5}=\frac{1}{81}$ și $b_2=4$.
32. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_1=5$ și $b_2=4$.
33. Determinați al patrulea termen al unei progresii geometrice în care primul termen este egal cu 125, iar rația este $\frac{1}{5}$.
34. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2-b_1=6$ și $b_1=2$.
35. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3-4b_2=-8$ și $b_1=2$.
36. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1=2$ și rația $q=\sqrt{3}$. Calculați partea întreagă a lui b_6.
37. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, ...$.
38. Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=5$ și $b_6=10$.
39. Calculați produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{3}$ și rația egală cu $-\sqrt{3}$.
40. Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=4$.
41. Determinați numărul real pozitiv x, știind că șirul $1, x, x+6, 27, ...$ este o progresie geometrică.
42. Arătați că numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
43. Determinați valorile reale ale numărului x știind că numerele $4-x, 8+x, 10x+17$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
44. Determinați valorile reale ale numărului x știind că numerele $4x-7, 5x-8, 7x-10$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
45. Determinați valorile reale ale numărului x știind că numerele $x-1, \sqrt{9x+6}, 2x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
46. Calculați sumele:

a) $1+3+9+...+729$; b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{64}$; c) $1+2+2^2+...+2^8$.

47. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 12, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 6.
48. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că numerele $4, a, b$ sunt în progresie geometrică și $2, 7, a$ sunt în progresie aritmetică.
49. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1\geq 0, a_n=18, r=2$ și $S_n=88$.
50. Determinați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $r\geq 0, a_1a_5=28$ și $a_2+a_4=16$.
51. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Știind că $a_1+a_5+a_9=51$, calculați $a_3+a_4+a_5+a_8$.
52. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_{11}=15$. Calculați $a_1+a_2+...+a_{21}$.

53. Calculați suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$

54. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația nenulă. Știind că suma primilor n termeni ai progresiei este cât o treime din suma următorilor n termeni, calculați $\frac{S_{3n}}{S_n}$.

55. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu toți termenii pozitivi în care $b_1 + b_2 + b_3 = 26$ și $b_5 + b_6 + b_7 = 2106$. Calculați b_7.

56. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică pentru care $a_1 = b_1 = 2$, $a_3 = b_3$ și $a_2 = b_2 + 9$. Calculați $a_{10} \cdot b_{10}$.

57. Determinați valorile reale ale numărului x știind că numerele $\left[\frac{x+3}{2}\right]$, $2x+1$, $4x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

58. Calculați sumele:

a) $4 + 44 + 444 + ... + \underbrace{444...4}_{\text{n cifre de 4}}$; b) $1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...1}_{\text{2020 cifre de 1}}$; c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{10^k}$.