NUMERE COMPLEXE

Forma algebrică a unui număr complex este $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, unde $i^2 = -1$.

Numărul real a se numește partea reală a numărului complex z și se notează cu $\operatorname{Re}(z)$, numărul real b se numește coeficientul părții imaginară a numărului complex z și se notează cu $\operatorname{Im}(z)$, bi se numește partea imaginară a numărului complex z, iar i se numește unitate imaginare și $i^2 = -1$.

Mulțimea numerelor complexe este $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Dacă $b = 0$ atunci $z = a \in \mathbb{R}$, deci $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dacă $a = 0$ atunci $z = bi$. În acest caz spunem că numărul complex este pur imaginar.

Fie $z_1 = a_1 + b_1 i$ și $z_2 = a_2 + b_2 i$. Atunci:

a) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

b) $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$.

c) $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

d) $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - \dfrac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} i$.

e) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} i$.

Dacă $z = a + bi$, atunci opusul este $-z = -a - bi$, conjugatul este $\overline{z} = a - bi$, iar modulul este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Puterile naturale ale numărului i sunt: $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$.

Observație: Suma oricăror 4 puteri naturale consecutive ale numărului i este nulă, adică $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$.

Proprietăți.

1) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$; 2) $z\overline{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) \in \mathbb{R}$; 3) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$; 4) z este pur imaginar dacă și numai dacă $\overline{z} = -z$; 5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; 6) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; 7) $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$;

8) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 9) $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$; 10) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; 11) $|\overline{z}| = |z|$; 12) $z\overline{z} = |z|^2$;

13) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; 14) $|z^n| = |z|^n$; 15) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$; 16) $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$;

17) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Rezolvarea ecuației de gradul doi cu coeficienți reali:

Forma generală a ecuației de gradul doi cu coeficienți reali este $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Se calculează $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Dacă $\Delta > 0$ atunci ecuația are două soluții reale și distincte date de formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

b) Dacă $\Delta = 0$ atunci ecuația are două soluții reale și egale, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

c) Dacă $\Delta < 0$ atunci ecuația are două soluții complexe și conjugate date de formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

- Relațiile lui Viète sunt: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.
- Ecuația de gradul doi când se cunosc soluțiile x_1 și x_2 este $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Ecuația de gradul doi când se cunosc $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației este $x^2 - Sx + P = 0$.
- Expresia $ax^2 + bx + c$ se descompune în produs de factori după formula $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației.
- În aplicații sunt utile formulele: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

Forma trigonometrică a unui număr complex este $z = r(\cos t + i \sin t)$, unde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numește raza polară, iar $t = \arg(z) = arctg\dfrac{b}{a} + k\pi$, unde $k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a,b > 0 \\ 1, & \text{dacă } a < 0 \\ 2, & \text{dacă } a > 0, b < 0 \end{cases}$ se numește argumentul redus al numărului complex z.

Dacă $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ și $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$ atunci:

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)\right]$; b) $(z_1)^n = r_1^n \left[\cos(nt_1) + i \sin(nt_1)\right]$;

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)\right]$.

Ecuații binome: $z^n = r(\cos t + i \sin t) \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{t + 2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{t + 2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}$.

Oricare dintre soluțiile ecuației $z^n = 1, n \in \mathbb{N}^*$ se numește rădăcină de ordinul n a unității. Deci rădăcinile de ordinul n ale unității sunt $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1}$ și reprezintă afixele vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul $\mathscr{C}(O, 1)$.

Ecuații bipătrate: Forma generală a unei ecuații bipătrate este $az^{2n} + bz^n + c = 0$. Se notează $z^n = t$ și se rezolvă ecuația de gradul doi $at^2 + bt + c = 0$, iar pentru fiecare soluție obținută se revine la substituție obținându-se ecuații binome care se rezolvă.

APLICAȚII

1. Calculați:

a) $(1+i)(1-2i) - 3(2+i)$; b) $(3+2i)(1-i) - (2-3i)(3+i)$; c) $(1-i)^{28}$;

d) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)...(1-i^{2020})$; e) $1 + i + i^2 + ... + i^{30}$; f) $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2 + \left(\sqrt{5}-2i\right)^2$;

g) $(1+2i)^4 + (1-2i)^4$; h) $\dfrac{1}{2+i} + \dfrac{1}{2-i}$; i) $\dfrac{1}{3+4i} + \dfrac{1}{3-4i}$; j) $\dfrac{13}{3+2i} + \dfrac{13}{3-2i}$;

k) $\dfrac{4-5i}{5+4i} + \dfrac{7+4i}{4-7i}$; l) $\dfrac{5-3i}{4-i} + \dfrac{5+3i}{4+i}$; m) $\left(\dfrac{1}{2+3i} - \dfrac{1}{2-3i}\right)^2$; n) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{16}$;

o) $\left(\dfrac{(1+2i)(1+3i)}{5}\right)^6$.

2. Determinați partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{2}+i\right)^3$.

3. Determinați partea reală a numărului complex $z = \dfrac{2+i}{2-i}$.

4. Determinați partea reală a numărului complex $z=\dfrac{3+2i}{2-3i}$.

5. Determinați partea reală a numărului complex $z=\left(\sqrt{5}-i\right)^6$.

6. Determinați partea imaginară a numărului complex $(1+i)^{12}+(1-i)^{12}$.

7. Arătați că numărul $z=\dfrac{2+5i}{3-4i}+\dfrac{2-5i}{3+4i}$ este real.

8. Arătați că $\dfrac{2+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{2+i}=\dfrac{6}{5}$.

9. Fie $a\in\mathbb{R}$ și numărul complex $z=\dfrac{a-3i}{3-ai}$. Determinați a pentru care $z\in\mathbb{R}$.

10. Calculați modulele numerelor complexe:

a) $(2-i)(3+2i)-4(1+i)$; b) $1+i+i^2+...+i^{10}$; c) $\dfrac{3+7i}{3-7i}$; d) $\dfrac{4-5i}{6+i\sqrt{5}}$;

e) $(1+i)^2$; f) $\left(2-i\sqrt{5}\right)^6$; g) $\left(\dfrac{2+i\sqrt{12}}{-1-i\sqrt{3}}\right)^4$; h) $\left(\sqrt{3}+2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right)^2$.

11. Calculați $|6+8i|-|8-6i|$.

12. Calculați $|z|^4$ pentru $z=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

13. Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ știind că $x(3-2i)-2y(4+i)=-2-6i$.

14. Verificați că numărul $1-i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

15. Fie $z\in\mathbb{C}$. Arătați că $i\left(\overline{z}-z\right)\in\mathbb{R}$.

16. Calculați $z+\dfrac{1}{z}$ pentru $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

17. Demonstrați că $z^2=\overline{z}$, unde $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

18. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $z-2-5i=3\overline{z}$; b) $4\overline{z}-3z=2+14i$; c) $3z+2\overline{z}=5+2i$; d) $\dfrac{\overline{z}-3i}{z}=2$;

e) $z^2=-16$; f) $z^2=-25$; g) $x^2-4x+5=0$; h) $x^2-4x+13=0$;

i) $2x^2-6x+5=0$; j) $z^2=3+4i$; k) $z^2=\dfrac{1-i}{1+i}$; l) $z+2|z|=13+4i$;

m) $z+2|z-3|=\overline{3i+9}$; n) $z^4+5z^2-36=0$; o) $z^4+15z^2-16=0$.

19. Fie $z\in\mathbb{C}$. Arătați că, dacă $4z+3\overline{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$.

20. Arătați că numărul $A=z(3+4i)+\overline{z}(3-4i)$ este real, pentru orice număr complex z, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

21. Arătați că numărul $N=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural.

22. Arătați că numărul $a=\left(\dfrac{1}{1-i}-\dfrac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg.

23. Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2+2i=0$.

24. Se consideră numerele complexe $z_1=3+2i$ și $z_2=3-2i$. Arătați că numărul z_1+z_2 este real.

25. Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$.

26. Se consideră numerele complexe $z_1=2+3i$ și $z_2=4-6i$. Arătați că numărul $z_1z_2+2z_1+z_2$ este real.

27. Se consideră numărul complex $z=4-i$. Calculați $z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}$.

28. Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}=9$.

29. Arătați că, dacă $z^2 + z + 2 = 0$, unde z este număr complex, atunci $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.

30. Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 2i$ și $z_2 = 3 - 3i$. Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.

31. Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ și $z_2 = 1 + 2i$. Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.

32. Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1) = (a-b+1)(i-1)$.

33. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $x_1 = -2 + i$ este soluție a ecuației $x^2 + (3m+1)x + 5 = 0$.

34. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$ are soluții în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

35. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordinul 3 a unității, diferită de 1. Calculați:

a) $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1$; b) $\varepsilon^2 + \bar{\varepsilon}^2$; c) $\left(\varepsilon^4 + \bar{\varepsilon}^4\right)^{2020}$.

36. Fie $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculați $\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right)\left(2\varepsilon^2 + \varepsilon\right)$.

b) Aflați $\lambda \in \mathbb{C}$ știind că $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda ab$, unde $x = a + b, y = a\varepsilon + b\varepsilon^2, z = a\varepsilon^2 + b\varepsilon$.