METODE DE NUMĂRARE

- O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor ei este o ***mulțime ordonată***.
- Se numește ***permutare*** a mulțimii finite A orice mulțime ordonată formată cu elementele mulțimii A. Numărul permutărilor mulțimii A cu n elemente este $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n = n!$. Prin convenție $0! = 1$.
- Submulțimile ordonate cu $k, 0 \le k \le n$ elemente ale mulțimii A se numesc ***aranjamente de*** n ***elemente luate câte*** k. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k, este
  $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. $A_n^0 = 1, A_n^n = n!$.
- Submulțimile mulțimii A formate cu $k, 0 \le k \le n$ elemente se numesc ***combinări de*** n ***elemente luate câte*** k. Numărul combinărilor de n elemente luate câte k, este $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

  $C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = C_n^{n-1} = n, C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}, C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

  Observație. Condițiile de existență pentru A_n^k, respectiv C_n^k sunt: $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ n, k \in \mathbb{N} \end{cases}$.

  Fie A, B mulțimi finite și $card(A) = m, card(B) = n$.
- Numărul funcțiilor $f : A \to B$ este egal n^m.
- Numărul funcțiilor injective $f : A \to B$ este egal A_n^m.
- Numărul funcțiilor strict monotone $f : A \to B$ este egal C_n^m.
- Numărul funcțiilor bijective $f : A \to A$ este egal $m!$.

  Pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ cunoscută sub denumirea de ***formula lui Newton***.

  Numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$ se numesc coeficienți binomiali.

  Termenul general al dezvoltării sau termenul de rang $k+1$ este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

  Între termenul de rang $k+1$ și $k+2$ există relația $\dfrac{T_{k+1}}{T_{k+2}} = \dfrac{k+1}{n-k} \cdot \dfrac{a}{b}$.

  Dezvoltarea are $n+1$ termeni. Dacă $n = 2p$ atunci dezvoltarea are $2p+1$ termeni, iar termenul din mijloc este T_{p+1}. Dacă $n = 2p+1$ atunci dezvoltarea are $2p+2$ termeni, iar termenii din mijloc sunt T_{p+1} și T_{p+2}.

  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$, adică numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.

  Suma coeficienților binomiali de rang par este $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$, iar suma coeficienților binomiali de rang impar este $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}$.

  $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$, iar termenul general este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$.

APLICAȚII

1. Calculați:

a) $0! + 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$; b) $A_4^2 - P_3$; c) $C_4^3 + P_4$; d) $C_6^5 + A_6^5$;

e) $C_7^2 - A_6^2 + 12$; f) $\dfrac{4! + 3!}{C_6^1}$; g) $\dfrac{P_4 + C_6^1}{A_4^1}$; h) $3C_4^1 - A_4^2$;

i) $A_4^3 - 5C_6^4$; j) $C_5^3 + C_5^4$; k) $\frac{C_{18}^8}{C_{18}^7}$; l) $C_{10}^4 - C_{10}^6$;

m) $C_{2020}^5 - C_{2020}^{2015}$; n) $C_9^7 - C_8^7 - C_8^6$; o) $C_{2019}^2 - C_{2018}^2 - C_{2018}^1$;

p) $C_6^0 - C_6^1 + C_6^2 - C_6^3 + C_6^4 - C_6^5 + C_6^6$; q) $C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10}$.

2. Comparați numerele $a = C_5^1 + C_5^3 + C_5^5$ și $b = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$.
3. Demonstrați că numărul $\frac{10!}{4!\cdot 6!} - \frac{11!}{2!\cdot 9!}$ este natural.
4. Rezolvați ecuațiile:

a) $C_n^2 = 36$; b) $A_n^1 + C_n^1 = 20$; c) $\frac{(n-4)!}{(n-6)!} = 20$; d) $C_{n+3}^{n+2} = 8$;

e) $A_n^2 = 30$; f) $C_n^2 = C_n^1 + 5$; g) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = 90$; h) $C_n^1 + C_n^0 = 15$;

i) $C_n^8 = C_n^6$; j) $C_n^1 + C_n^2 = 120$; k) $4C_n^1 + 2C_n^2 = 28$; l) $C_x^2 + A_x^2 = 18$;

m) $C_{2x-5}^2 = 3$.

5. Rezolvați inecuațiile:

a) $2C_n^2 \le n + 15$; b) $C_{17}^{x+2} \le C_{17}^x$; c) $C_n^2 < 15$; d) $C_{x+1}^x + C_x^{x-2} \le 10$.

6. Câte elemente ale mulțimii $A = \{x \mid x = C_5^k, k \in \mathbb{N}, k \le 5\}$ sunt divizibile cu 5?
7. Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15.
8. Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 7.
9. Determinați câte numere de câte trei cifre se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
10. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.
11. Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
12. Determinați câte numere de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
13. Determinați câte numere de câte două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
14. Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele $1, 3, 5, 7, 9$?
15. Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{0,1,2,3\}$.
16. Câte numere de două cifre distincte se pot forma cu cifrele $0, 2, 4, 6, 8$?
17. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.
18. Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
19. Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.
20. Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.
21. Determinați numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.
22. Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 9 elemente.
23. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
24. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.
25. Determinați numărul tuturor submulțimilor de 3 elemente ce se pot forma cu elemente din mulțimea $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
26. Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A = \{0,1,2,...,9\}$.
27. Calculați numărul submulțimilor mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$, care au un număr impar de elemente.
28. Se consideră mulțimea $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere pare.
29. Determinați numărul natural nenul n astfel încât numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi cu n elemente să fie egal cu 10.

30. Determinați numărul natural nenul n pentru care mulțimea $\{1,2,...,n\}$ are exact 66 de submulțimi cu două elemente.
31. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că are exact 36 de submulțimi cu două elemente.
32. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că are exact 45 de submulțimi cu două elemente.
33. Arătați că nu există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.
34. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.
35. Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,...,8\}$. Determinați numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente dintre care exact trei sunt numere impare.
36. Într-o clasă sunt 18 elevi, dintre care 8 sunt băieți. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 4 fete și 3 băieți.
37. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(2)=f(3)$.
38. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(5)$.
39. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care verific relația $f(3)=4$.
40. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care verific relația $f(2)=f(3)=1$.
41. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3,4\}$ pentru care $f(2)$ este număr impar.
42. Determinați numărul funcțiilor bijective $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$.
43. Determinați numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$.
44. Determinați numărul funcțiilor strict crescătoare $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$.
45. Determinați numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{3,4,5,6,7,8\}$.
46. Aflați numărul soluțiilor sistemului de inecuații $\begin{cases}(x-1)!<8\\(y+1)!<32\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{N}$.
47. Calculați $C_{2019}^{0}\cdot 7^{2019}-C_{2019}^{1}\cdot 7^{2018}\cdot 8+C_{2019}^{2}\cdot 7^{2017}\cdot 8^{2}-...+C_{2019}^{2018}\cdot 7\cdot 8^{2018}-C_{2019}^{2019}\cdot 8^{2019}$.
48. Se consideră dezvoltarea $\left(a^4+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^8$. Determinați rangul termenului care-l conține pe a^4.
49. Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.
50. Determinați $a>0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.
51. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y^2}\right)^{14}$. Determinați termenul care îi conține pe x și y la aceeași putere.
52. Determinați termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^6+\frac{1}{x^2}\right)^8$, unde $x\neq 0$.
53. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{120}$. Determinați rangul termenului care nu-l conține pe x.
54. Se consideră dezvoltarea $\left(5\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x}\right)^{10}$. Determinați termenul independent de x.
55. Suma coeficienților binomiali de rang par ai dezvoltării $\left(3x-2y^2\right)^n$ este 16. Determinați termenul de rang trei.
56. Aflați numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{3}+2\right)^7$.
57. Aflați numărul termenilor iraționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{5}-3\right)^{100}$.

58. Aflați numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{80}$.