ECUAȚII EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE

a. ***Ecuații exponențiale***

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0, a \neq 1$.

   Indicație: Din egalitate rezultă $f(x) = g(x)$, iar soluțiile acestei din urmă ecuații sunt soluțiile ecuației date.

2. $a^{f(x)} = b,\ a > 0, a \neq 1$.

   Indicație: i) Dacă $b \leq 0$ atunci ecuația nu are soluții reale.
   ii) Dacă $b > 0$ atunci se logaritmează ambii membri într-o bază convenabilă și se obține o ecuație de forma $f(x) = \log_a b$ care se rezolvă, iar de aici se obțin soluțiile ecuației date.

3. $c_1 \cdot a^{f(x)} = c_2 \cdot b^{g(x)},\ a,b > 0, a,b \neq 1$.

   Indicație: Se logaritmează ambii membri ai ecuației într-o bază convenabilă.

4. $c_1 \cdot a^{f_1(x)} + c_2 \cdot a^{f_2(x)} + ... + c_k \cdot a^{f_k(x)} = d_1 \cdot b^{g_1(x)} + d_2 \cdot b^{g_2(x)} + ... + d_l \cdot b^{g_l(x)}$, unde $a,b > 0$, $a,b \neq 1$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,l}$.

   Indicație: Prin factor comun și efectuarea calculelor se obține o ecuație de tipul 3, care se rezolvă.

5. $c_1 \cdot a^{2f(x)} + c_2 \cdot a^{f(x)} + c_3 = 0,\ a > 0, a \neq 1$.

   Indicație: Se notează $a^{f(x)} = t, t > 0$ și se obține ecuația de gradul II $c_1 t^2 + c_2 t + c_3 = 0$ cu soluțiile t_1, t_2. Pentru fiecare soluție se revine la notație obținându-se ecuații de tipul 2, care se rezolvă.

6. $c_1 \cdot a^{f(x)} + c_2 \cdot b^{f(x)} = c_3,\ a,b > 0, a,b \neq 1, ab = 1$.

   Indicație: Din relația $ab = 1$ se obține $b = \frac{1}{a}$, iar ecuația devine $c_1 \cdot a^{f(x)} + \frac{c_2}{a^{f(x)}} = c_3$. Se notează $a^{f(x)} = t, t > 0$ și se obține ecuația de gradul II $c_1 t^2 - c_3 t + c_2 = 0$ cu soluțiile t_1, t_2. Pentru fiecare soluție se revine la notație obținându-se ecuații de tipul 2, care se rezolvă.

7. $c_1 \cdot a^{2f(x)} + c_2 \cdot (ab)^{f(x)} + c_3 \cdot b^{2f(x)} = 0,\ a,b > 0, a,b \neq 1$.

   Indicație: Se împarte ecuația prin $b^{2f(x)}$ și se obține ecuația $c_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + c_3 = 0$, ecuație de tipul 5.

8. Ecuații exponențiale cu soluție unică.

   Indicație: În general se aduc ecuațiile la forma $f(x) = c$, unde *f* este o funcție strict monotonă, iar *c* este o constantă și observând că ecuația are o soluție x_0, aceasta este soluție unică.

9. $[f(x)]^{g_1(x)} = [f(x)]^{g_2(x)}$

   Indicație: i) Dacă $f(x) = 1$ atunci egalitatea se verifică oricare ar fi $g_1(x), g_2(x)$.
   ii) Dacă $f(x) = -1$ atunci egalitatea devine $(-1)^{g_1(x)} = (-1)^{g_2(x)}$.
   iii) Dacă $f(x) > 0,\ f(x) \neq 1$, atunci obținem ecuația $g_1(x) = g_2(x)$.
   iv) Dacă $f(x) = 0$, atunci egalitatea are loc pentru $g_1(x) > 0, g_2(x) > 0$.

b. ***Ecuații logaritmice***

1. $\log_{g(x)} f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$.

   Indicație: Se impun condițiile de existență $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$. Ecuația este echivalentă cu $f(x) = [g(x)]^a$.

   Din rezolvarea acestei ecuații numai acele valori care verifică sistemul de condiții de mai sus sunt soluții pentru ecuația dată.

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x),\ a > 0, a \neq 1$.

Indicație: Se impun condițiile de existență $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$. Ecuația este echivalentă cu $f(x)=g(x)$, ale cărei soluții sunt soluții ale ecuației dată dacă verifică sistemul de condiții.

3. $\log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x)$.

   Indicație: Se impun condițiile de existență $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ h(x)>0 \\ h(x)\neq 1 \end{cases}$. Ecuația este echivalentă cu $f(x)=g(x)$, ale cărei soluții sunt soluții ale ecuației dată dacă verifică sistemul de condiții.

4. $\log_a\left(\log_b f(x)\right)=c,\ a,b>0,\ a,b\neq 1$.

   Indicație: Se impun condițiile de existență $\begin{cases} f(x)>0 \\ \log_b f(x)>0 \end{cases}$. Ecuația este echivalentă cu $f(x)=b^{a^c}$, ale cărei soluții sunt soluții ale ecuației dată dacă verifică sistemul de condiții.

5. Ecuații logaritmice ce conțin logaritmi în aceeași bază.

   Indicație: Se impun condițiile de existență ale logaritmilor și utilizând proprietățile logaritmilor se aduce ecuația la forma $\log_a f(x)=b$, care se rezolvă, iar soluțiile sunt soluții ale ecuației dată dacă verifică condiții de existență.

6. Ecuații logaritmice ce conțin logaritmi în baze diferite.

   Indicație: Se impun condițiile de existență ale logaritmilor. Se aduc logaritmii în aceeași bază folosind formulele de schimbarea bazei, după care se procedează ca la tipul 5.

7. $c_0+c_1\log_a f(x)+c_2\log_a^2 f(x)+...+c_k\log_a^k f(x)=0,\ a>0,\ a\neq 1$.

   Indicație: Se impun condiția de existență $f(x)>0$. Se notează $\log_a f(x)=t$ și se rezolvă ecuația $c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_kt^k=0$, etc.

8. Ecuații logaritmice cu soluție unică.

   Indicație: În general se aduc ecuațiile la forma $f(x)=c$, unde *f* este o funcție strict monotonă, iar *c* este o constantă și observând că ecuația are o soluție x_0, aceasta este soluție unică.

Aplicații

I. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații exponențiale:

1. $2^{1-7x}=256$.
2. $3^{3x-5}=3^{-2}$.
3. $3^{2-3x}=243$.
4. $3^{2x+2}=9$.
5. $3^{7x-10}=81$.
6. $5^{2x}=25$.
7. $5^{x-2}=25$.
8. $5^{2x-4}=25$.
9. $5^{3x-5}=625$.
10. $2^{x^2-x-5}=128$.
11. $7^{x^2-x+1}=343$.
12. $2^{7x-5}=4^x$.
13. $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.
14. $32^x=16\cdot 2^x$.
15. $6^{x^2+x}=6^{5x+8}$.
16. $\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{9^x}{27}$.
17. $5^{\sqrt{x+2}}=25$.
18. $7^{2x+3}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\sqrt{x}}$.
19. $3^{\log_3(x-3)}=6$.
20. $3^{x^2+3}=3\cdot 3^{3x}$.
21. $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.
22. $\left(11+6\sqrt{2}\right)^x=\left(3+\sqrt{2}\right)^{x-2}$.
23. $3^x+3^{x+1}=36$.
24. $5^x+5^{x+1}=30$.
25. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.
26. $2^{x+3}+5\cdot 2^{x+2}-3\cdot 2^{x+1}+2^x=1472$.
27. $7^{x+2}-2\cdot 7^{x+1}+3\cdot 7^x=1862$.
28. $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.
29. $25^x-3\cdot 5^x-10=0$.
30. $4^x-7\cdot 2^x-8=0$.
31. $49^x-6\cdot 7^x-7=0$.
32. $3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$.
33. $9^{\sqrt{x^2+3}}-3^{1+\sqrt{x^2+3}}=54$.
34. $9^x-5\cdot 3^x+6=0$.
35. $4^x+16=5\cdot 2^{x+1}$.
36. $e^x+4\cdot e^{-x}=4$.
37. $7^x-7^{1-x}=6$.
38. $3\cdot 9^x-6^x=2\cdot 4^x$.

39. $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$ 40. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$. 41. $\sqrt{4^x-2^{1+x}+1}=2^x-1$.

42. $3^{|x|}+4^{|x|}+5^{|x|}=12$.

II. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații logaritmice:

1. $\log_3(2x+1)=\log_3 5$.
2. $\lg\left(x^2+5\right)=\lg 9$.
3. $\log_2\left(x^3+3\right)=\log_2 30$.
4. $\log_5(2x-1)=2$.
5. $\log_5\left(x^2-4\right)=\log_5(5x-8)$.
6. $\log_4(x+3)+\log_4(x-3)=2$.
7. $\lg(8x+9)+\lg x=1+\lg\left(x^2+1\right)$.
8. $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.
9. $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)=1$.
10. $\lg^2 x-4\lg x-5=0$.
11. $\log_3^2 x+\log_3(9x)=8$.
12. $3\lg^2\left(x^2\right)-\lg x-1=0$.
13. $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.
14. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{3}$.
15. $\log_2 x+\log_4\sqrt{x}=5$.
16. $\log_x 3+\log_{\sqrt[3]{x}} 27=30$.
17. $\log_3\left(\log_2\left(x^2-4x-4\right)\right)=1$.
18. $\log_3 x+\log_2 x=1$.
19. $3\log_x 5+\log_5(5x)=5$.
20. $\log_3 x=\log_x 3$.
21. $\log_x(x+2)+\log_{x+2} x=\dfrac{5}{2}$.
22. $\log_x(x+1)=\log_{x+1} x$.
23. $\log_{x^2}(x+2)+\log_x\left(x^2+2x\right)=4$.
24. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$.
25. $\log_x(x+2)=2$.
26. $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)=1$.

III. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

1. $2^{x+1}\le 4$.
2. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-6x-x^2}\le\dfrac{27}{64}$.
3. $35^x-25^x\le 28^x-20^x+21^x-15^x$.
4. $9^x-5\cdot 3^x+6\le 0$.
5. $\dfrac{1}{2^x-1}>\dfrac{1}{1-2^{x-1}}$.
6. $\log_3\left(3^{4x}-3^{2x+1}+3\right)<2\log_9 7$.
7. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x}{x^2+2}<0$.
8. $\log_4 x+\log_x 4<\dfrac{5}{2}$.
9. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3\right)<\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$.
10. $3^{\log_3 x}<1$.
11. $\log_3 x+\log_9 x<3$.

IV. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

1. $(3x-1)^{x^2}=(3x-1)^{2x+3}$.
2. $x^{\log_2 x-2}=256$.
3. $x^{\log_{x^2}\left(x^2-1\right)}=8$.